UNIVERSITE PAUL SABATIER

Licence STS, Mention Physique

Parcours Sciences Physiques et Chimiques- L3

Année Universitaire 2009 - 2010

Thermodynamique Statistique

Partiel Novembre 2009 (durée 1 H 30)

I.-. Question de cours

1 – Définition de l'ensemble canonique.

2 – Définition de la fonction de partition Z des micro-états (i) d'un système.

3.- Définition de la probabilité P_i de trouver un système dans le micro-état (i) d'énergie E_i.

4 – Définition de la valeur moyenne de l'énergie <E>.

5 - Donner l'expression de l'entropie statistique de Shannon associée à la distribution des probabilités $\{P_i\}$ des micro-états (i). En déduire l'expression de l'entropie canonique S^c en fonction de <E>, T et Z.

II.- Micro-états de translation d'une particule ultra relativiste se déplaçant librement sur un segment de longueur L

1 – Une particule libre ultra relativiste (E =p c) se déplace librement sur un segment de longueur L. Définir l''espace des phases permettant d'étudier le mouvement de la particule et préciser sa dimension.

2 – Déterminer le nombre $\Phi^*(E)$ de micro-états dont l'énergie est inférieure ou égal à E. En déduire le nombre de micro-états $\Omega^*(E)$ l'énergie est comprise entre E et E+dE. Donner la probabilité P_i que cette particule soit le micro-état (i) d'énergie E_i..

4 – Calculer la densité d'états d'énergie $\rho(E)$.

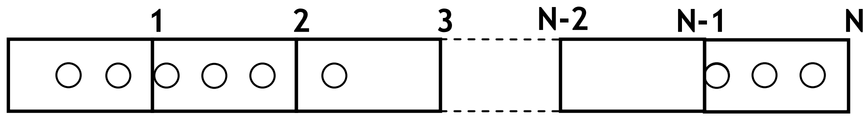
III – Oscillateur harmonique à une dimension

En mécanique quantique, on montre que les niveaux d'énergie d'un oscillateur harmonique à une dimension sont quantifiés et sont de la forme : ε_n = n $h\omega$ avec n entier positif ou nul. Ces niveaux d'énergie ne sont pas dégénérés.

On considère un système <u>isolé</u> de N oscillateurs harmoniques à une dimension, <u>**discernables**</u>, indépendants et de même pulsation ω. L'énergie du système vaut E. Un micro-état du système (l) est entièrement déterminé lorsqu'on connaît l'ensemble des valeurs des nombres quantiques de vibrations n_i caractérisant l'état de chacun des oscillateurs : l) $=\{n_1, n_2, n_3,\dots, n_{N-1}, n_N\}$.

On pose n= $\sum_{i=1}^{N} n_i$ et par conséquent E = $\sum_{i=1}^{N} \hbar\omega\, n_i = \hbar\omega\, n$ et n = $\frac{E}{\hbar\omega}$. On dispose donc d'un nombre total n de quanta d'énergie de vibration à répartir dans N oscillateurs.

On veut déterminer le nombre de micro-états accessibles Ω(E, N) ≡ Ω(n, N) pour le système. Pour cela, on se ramènera au problème suivant : Comment répartir n boules blanches identiques et indiscernables (quanta d'énergie) dans N boites discernables et donc numérotées ? Le nombre de boules blanches par boites est n_i. La figure ci-dessous représente un des micro-états possibles (l) (une répartition possible) où les boules blanches sont alignées avec les N-1 cloisons séparant les N boites.



n_1=2 **n_2=1** **n_3=1** **n_{N-1}=0** **n_N=3**

On peut également remplacer les N-1 parois par N-1 boules noires toutes indiscernables entre elles. Par conséquent dans le calcul du nombre de micro-états distincts, la permutation entre boules blanches et la permutation entre boules noires sont donc sans effet sur la répartition. Par contre toute permutation entre une boule blanche et une boule noire modifie la répartition.

1 – Montrer que le nombre de micro-états Ω(E, N) ≡ Ω(n, N) est le nombre de combinaisons de n boules blanches (quanta d'énergie) d'un ensemble de N -1+ n boules.

2 – On suppose que n >> 1 et N >> 1. Montrer que l'entropie micro-canonique S*(n, N) a pour expression : S*(n, N) = $k_B \left[N\, Ln\left(\frac{N+n}{N}\right) + n\, Ln\left(\frac{N+n}{n}\right)\right]$.

3 – Montrer que S* est une fonction croissante de n (donc de E) en précisant son comportement pour n $\to$ 0 et n $\to \infty$. Calculer la température micro-canonique T* avec $\frac{\partial n}{\partial E} = \frac{1}{\hbar\omega}$. Montrer que cette température ne peut- être que positive.

4 – Montrer que l'énergie E du système a pour expression : $E = \frac{N\hbar\omega}{\exp(\frac{\hbar\omega}{k_B T}) - 1}$.

Rappels : Ln N != N Ln N – N pour N>> 1 ; Ln n ! = n Ln n – n pour n >>1